

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
ETAPA LOCALĂ  
CLASA a XII-a  
18.02.2012**

**Subiectul I.(40 puncte )**

Pe mulțimea  $G = (1,2)$  se consideră aplicația  $x * y = \frac{3xy - 4x - 4y + 6}{2xy - 3x - 3y + 5}$ . Arătați că:

- a)  $(G, *)$  este grup comutativ izomorf cu  $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ , printr-un izomorfism  $f : (1,2) \rightarrow (0, \infty)$  de forma

$$f(x) = \frac{m-x}{x-m+1};$$

- b) Calculați  $\frac{3}{2} * \frac{4}{3} * \frac{5}{4} * \dots * \frac{2012}{2011}$ .

*Prof. Eugen Jecan, Colegiul Național "Andrei Mureșanu"*

Dej

**Subiectul II.(20 puncte)**

Se consideră un grup  $(G, \cdot)$  astfel încât oricare ar fi  $x, y \in G, x \neq y$  există  $H_1, H_2$ , subgrupuri ale lui  $G$  astfel încât  $x \in H_1, y \in H_2$  și  $H_1 \cap H_2 = \{e\}$ .

- a) Să se arate că  $(G, \cdot)$  este grup comutativ.  
b) Să se rezolve, în  $(G, \cdot)$ , ecuațiile  $x^{2011} = a$  și respectiv  $x^{2012} = a$ , unde  $a \in G$ .

*prof. Gheorghe Lobonț, Colegiul Național „Mihai Viteazul” Turda*

**Subiectul III.(20 puncte)**

Pentru  $n \in \mathbb{N}$ , se consideră funcția  $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k \cdot \sqrt{1-x^k}, \forall x \in [0,1]$  și

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx. \text{ Calculați } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{n}.$$

*Prof. Nicolae Alb, Liceul Teoretic „Octavian Goga” Huedin*

**Subiectul IV.(10 puncte )** Dacă  $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcție continuă și  $8 \int_0^1 f(x) dx = 3 - 2\sin 2 - \cos 2$ , atunci  $\exists x_0 \in (0,1)$  astfel încât  $f(x_0) = x_0 \sin^2 x_0$ .

*Prof. Mirela Blaga, Liceul Teoretic „Al. Papiu Ilarian” Dej*

**Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.  
Timp efectiv de lucru - 3 ore.**

